

## CONTROLE DE SISTEMAS DINÂMICOS COM VÁRIÁVEIS DE ESTADO PARCIALMENTE DISPONÍVEIS – APLICAÇÃO EM ¼ DE SUSPENSÃO ATIVA

Luciano Paulo da Silva Filho<sup>1</sup>, Edson Italo Mainardi Júnior<sup>1</sup>, Diogo Ramalho de Oliveira<sup>1</sup>, Lucas Rangel de Oliveira<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia do Mato Grosso do Sul – Três Lagoas - MS

luciano.filho@estudante.ifms.edu.br, edson.mainardi@ifms.edu.br, diogo.ramalho@ifms.edu.br, lucas.rangel@ifms.edu.br

### Resumo

Este artigo apresenta um projeto de controle robusto  $H_\infty$ , com aplicação em ¼ de suspensão ativa de um veículo, para uma classe de sistemas dinâmicos lineares. O projeto é baseado em função de Lyapunov quadrática e LMIs (Linear Matrix Inequalities). A motivação é mostrar uma análise de controle com incertezas politópicas entre sistemas dinâmicos e técnicas de controle clássica.

**Palavras-chave:** Controle robusto, Controle Robusto  $H_\infty$ , Incertezas Politópicas, Sistema de Suspensão Ativa.

### Introdução

O interesse da comunidade científica no estudo de controle de sistemas dinâmicos vem crescendo nos últimos anos. Esse interesse vem do fato de que os sistemas dinâmicos são aplicados em diversas áreas importantes da engenharia, como exemplo: sistemas automotivos, aeronáutica, satélites, entre outros [1].

Neste estudo foi proposto um novo método para o controle de sistemas lineares incertos considerando o acesso somente à saída disponível da planta. O projeto foi baseado no critério de estabilidade de Lyapunov através de uma função quadrática e LMIs [2]. Primeiramente, foram apresentados estudos e simulações do circuito em malha aberta, tal que demonstram a estabilidade do sistema linear, no qual o vetor de estados  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  é disponível. Com base nesta teoria, foi proposta uma nova lei de controle dependente da saída disponível da planta,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  que assegura a estabilidade global do sistema linear realimentado. Sistemas de controle robustos geralmente são projetados ou baseados em modelos matemáticos onde o controlador projetado deve atender a determinada especificação de desempenho dinâmico, quando o sistema opere em malha fechada [3]. O projeto foi baseado nas propriedades de estabilidade de sistemas lineares, funções de Lyapunov quadráticas e LMIs. Toda a teoria desenvolvida neste capítulo foi ilustrada através de exemplos e os resultados de simulações demonstraram que, quando factíveis, os teoremas propostos apresentaram adequado desempenho.

### Metodologia

Os problemas de controle de sistemas dinâmicos com variáveis de estado parcialmente disponíveis vêm

despertando o interesse da comunidade científica. A solução deste tipo de abordagem está entre um dos problemas mais desafiadores da literatura, devido à sua característica não convexa [4]. Desse modo, considere um sistema dinâmico linear invariante no tempo na seguinte forma de espaço de estados:

$$\dot{x} = A(\beta)x(t) + B(\beta)u(t) \quad (1)$$

sendo que  $x(t)$  é o vetor de estado e  $u(t)$  é a entrada de controle. Nas matrizes  $A(\beta)$  e  $B(\beta)$ , o vetor  $\beta = [\beta_1 \ \beta_2 \ \dots \ \beta_r]'$  representa as incertezas politópicas (ou falhas estruturais). As matrizes  $A(\beta)$  e  $B(\beta)$  podem ser representadas por combinações convexas de seus vértices:

$$A(\beta) = \sum_{j=1}^r \beta_j A_j, \quad e \quad B(\beta) = \sum_{j=1}^r \beta_j B_j, \quad (2)$$

sendo  $\sum \beta_j = 1$ , para  $j$  de 1 até  $r$  e  $\beta_j \geq 0$ . Seguindo, considerando a lei de controle  $u(t) = ky(t)$ , sendo  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  a saída do sistema linear disponível. A partir de (1), pode-se reescrever o sistema realimentado por:

$$\dot{x} = (A(\beta) + B(\beta)KC)x(t) \quad (3)$$

**Problema 1:** Determinado uma função  $u(\cdot)$  tendo como estratégia de controle  $u(y(t))$ , que torne o ponto de equilíbrio  $x = 0$  do sistema dinâmico (1) – (3), satisfazendo um certo índice de desempenho, por exemplo, custo  $H_\infty$ , assintoticamente estável.

O teorema a seguir apresenta uma solução para o problema proposto, considerando  $u(t)=0$  (Malha aberta), considerando um certo índice de desempenho, por exemplo, custo  $H_\infty$ .

**Teorema 01** - Assume que  $p > m$ . Então, o Problema 01, tem solução e o sistema é assintoticamente estável se, existir um escalar  $\mu > 0$  e matrizes  $P = P' > 0$ ,  $i \in K$ , de dimensão adequada, satisfazendo o seguinte problema de otimização:

$\min \mu$

s.a  $P = P' > 0$

$$\begin{bmatrix} A_i'P + PA_i + C'C & H'P \\ PH & -\mu I \end{bmatrix} < 0$$

$i \in K$ , sendo  $\gamma^2 = \mu > 0$ . Ademais, se as condições impostas são factíveis, então assegura-se que:

$$\|H(s)\|_{\infty} \leq \sqrt{\mu}.$$

**Problema 2:** Projetar uma lei de controle  $K$  que torna o sistema dinâmico, satisfazendo o índice de desempenho (custo  $H_{inf}$ ) e globalmente assintoticamente estável.

Uma solução é apresentada no Teorema a seguir.

**Teorema 02** - Assume que  $p > m$ . Então, o Problema 01, tem solução e o sistema é assintoticamente estável se, existir um escalar  $\mu > 0$  e matrizes  $N \in \mathbb{R}^{m \times p}$ ,  $M \in \mathbb{R}^{m \times m}$  e  $P_i = P_i' > 0$ ,  $i \in K$ , de dimensão adequada, satisfazendo o seguinte problema de otimização:

$$\min \mu$$

$$\text{s.a } P_i = P_i' > 0$$

$$\begin{bmatrix} A_i' P_i + P_i A_i + B_i N C + C' N' B_i' + C' C & H' P_i \\ P_i H & -\mu I \end{bmatrix} < 0$$

$$B_i' P = M B_i$$

$i \in K$ , sendo  $\gamma^2 = \mu > 0$ . Ademais, se as condições impostas são factíveis, então a matriz  $K$ , é dada por:

$$K = (M')^{-1} N,$$

e então assegura-se que:

$$\|H(s)\|_{\infty} \leq \sqrt{\mu}.$$

## Resultados e Discussão

Nessa seção serão apresentados os resultados obtidos que possibilitaram a análise da técnica de controle utilizada. Considera o sistema didático de suspensão ativa de um quarto de veículo fabricado pela Quanser. O modelo pode ser visto na Figura 1 [1].

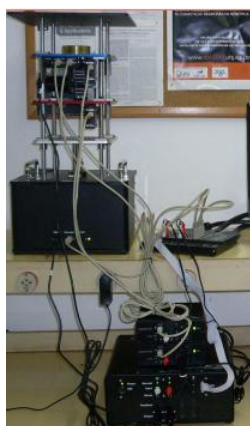


Figura 01 – Suspensão ativa – um quarto de veículo.

Para se obter um esquema matemático que represente o sistema real, é proposto um modelo esquemático, representado na Figura 2 [1].

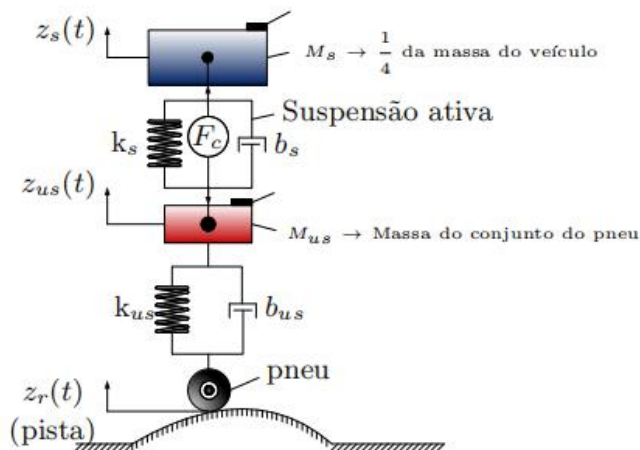


Figura 02 – Modelo esquemático.

Agora, considere o modelo em espaço de estados, o qual pode representar o modelo esquemático ilustrado na Figura 02. A ideia principal é analisar através do modelo em espaço de estados a resposta dinâmica.

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -\frac{k_s}{M_s} & -\frac{b_s}{M_s} & 0 & \frac{b_s}{M_s} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_s}{M_{us}} & \frac{b_s}{M_{us}} & -\frac{k_{us}}{M_{us}} & -\frac{(b_s + b_{us})}{M_{us}} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M_s} \\ 0 \\ -\frac{1}{M_{us}} \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ \frac{b_{us}}{M_{us}} \end{bmatrix} w(t),$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} z_s(t) - z_{us}(t) \\ \dot{z}_s \\ z_{us}(t) - z_r(t) \\ \dot{z}_{us} \end{bmatrix} \quad e \quad w(t) = \dot{z}_r,$$

sendo que as posições  $z_s(t)$ ,  $z_{us}(t)$  e  $z_r(t)$  são medidas através de encoders. Os valores das constantes podem ser encontrados na Tabela 1.

| Parâmetros                                            | Símbolo  | Valor |
|-------------------------------------------------------|----------|-------|
| Massa de $\frac{1}{4}$ do corpo total do veículo (Kg) | $M_s$    | 2,45  |
| Massa do conjunto do pneu (Kg)                        | $M_{us}$ | 1     |
| Constante de rigidez da mola (N/m)                    | $k_s$    | 900   |
| Constante de rigidez da mola (N/m)                    | $k_{us}$ | 2500  |
| Coefficiente de amortecimento (Ns/m)                  | $b_s$    | 7,5   |
| Coefficiente de amortecimento (Ns/m)                  | $b_{us}$ | 5     |

Tabela 01 – Parâmetros do sistema.

Ademais, o objetivo principal deste trabalho é estudar, propor e implementar uma lei de controle considerando o sistema dinâmico atuando com incertezas politópicas e/ou falhas estruturais, via realimentação da saída disponível. Essas incertezas podem assumir valores de  $\pm 10\%$  em relação aos valores nominais, descritos na Tabela 1. Logo, considere:

$$810 \leq k_s \leq 990 \text{ (N/m)},$$

$$2250 \leq k_{us} \leq 2750 \text{ (N/m)}.$$

Portanto, a fim de realizar o projeto de controle, considere os seguintes vértices do politopo:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -404,0816 & -3,0612 & 0 & 3,0612 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 990 & 7,5 & -2750 & -12,5 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -404,0816 & -3,0612 & 0 & 3,0612 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 990 & 7,5 & -2250 & -12,5 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -330,6122 & -3,0612 & 0 & 3,0612 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 810 & 7,5 & -2750 & -12,5 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -330,6122 & -3,0612 & 0 & 3,0612 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 810 & 7,5 & -2250 & -12,5 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0,4081 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T,$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}^T.$$

De início, é interessante investigar a resposta dinâmica do sistema sem realimentação (malha aberta), para tal simulação tem-se sinal de referência  $w(t)$  sendo uma onda quadrada de 0,02m de amplitude, com frequência de 1/3Hz com largura de pulso de 50% e considerando os valores descritos na Tabela 01. Considerando o Teorema 01, uma solução encontrada foi  $\|H(s)\|_\infty = 287,3953$ , e a seguinte matriz simétrica:

$$P =$$

$$1.0e+05 *$$

$$\begin{bmatrix} 0.8484 & 0.0055 & -1.9730 & -0.0045 \\ 0.0055 & 0.0004 & -0.0141 & -0.0008 \\ -1.9730 & -0.0141 & 4.9441 & 0.0149 \\ -0.0045 & -0.0008 & 0.0149 & 0.0027 \end{bmatrix}$$

A Figura 03, representa a resposta dinâmica do sistema em malha aberta. Note que o sistema é estável, entretanto as oscilações geram desconforto ao motorista.

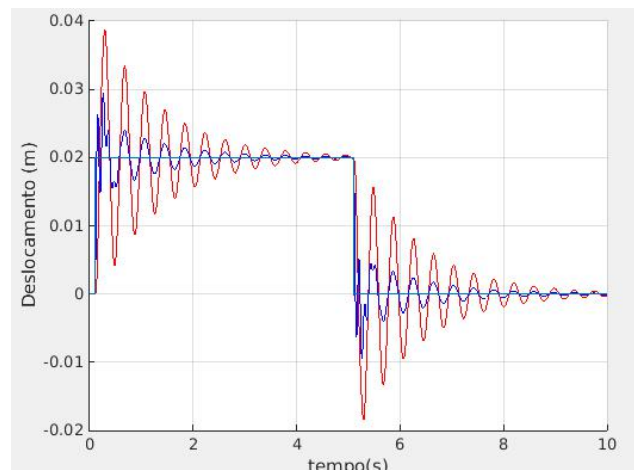


Figura 03 – Resposta dinâmica - Teorema 01.

Seguindo, para a resposta dinâmica do sistema realimentado, considerando  $u(t)=ky$  (malha fechada) para tal simulação tem-se a matriz de saída  $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0; & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ , sinal de referência  $w(t)$  sendo uma onda quadrada de 0,02m de amplitude, com frequência de 1/3Hz com largura de pulso de 50%. Considerando o Teorema 02, uma solução encontrada foi  $\|H(s)\|_\infty = 46,8905$  e o seguinte controlador,  $K = \begin{bmatrix} 819,2792 & 0,8772 \end{bmatrix}$ . A Figura 04 ilustra a resposta dinâmica do sistema. Note que o sistema é estável, com oscilações menores que os sistema em malha aberta e que consequentemente geram um melhor conforto ao motorista.

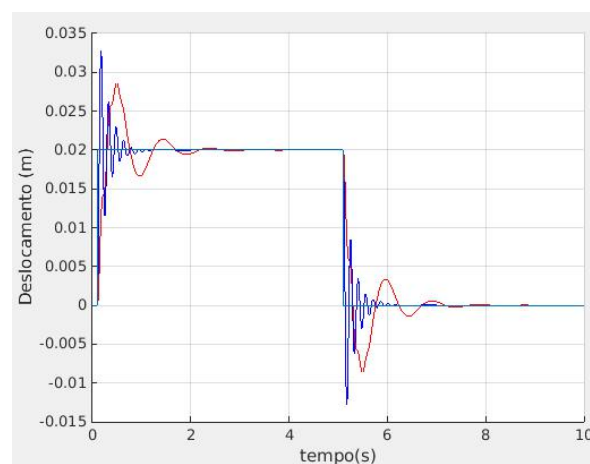


Figura 04 - Resposta Dinâmica (Malha Fechada).

É interessante investigar também a região de factibilidade das LMIs relacionadas ao controle dinâmico. Para projetar um controlador que garantam um desempenho adequado ao

sistema, assim considere os seguintes intervalos para os parâmetros bus e Mus:

$$-100 \leq \text{bus} \leq -1000,$$

$$-400 \leq \text{Mus} \leq -1000,$$

Considerando o Teorema 02, temos a seguinte região de factibilidade apresentada na Figura 05.

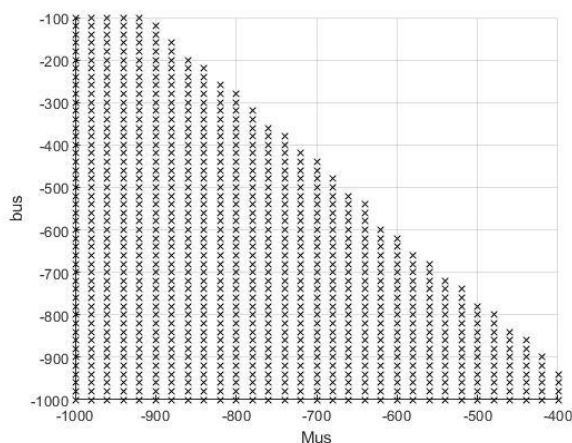


Figura 04: Região de factibilidade utilizando o Teorema 04.

A análise da Figura 04 deixa evidente a relaxação nas LMIs propostas no Teorema 02, ocasionada pela inserção das variáveis Pi.

### Considerações Finais

O presente trabalho realizou o estudo do controle com incertezas politópicas entre sistemas dinâmicos e técnicas de controle clássica apresentando a resposta dinâmica do sistema em malha aberta e fechada, garantindo a validação dos teoremas de controle aplicado a planta.

### Agradecimentos

Os autores agradecem ao IFMS pelo apoio financeiro referente ao Edital 030/2021 - Propi / IFMS - Iniciação Científica e Tecnológica - Edital de Pesquisa.

### Referências

- [1] Oliveira, D. R. ; Teixeira, M. C. M. ; Assuncao, E. ; Souza, W. A. ; Moreira, M. R. ; Silva, J. H. P. . Projeto de Controle Robusto Hinf Chaveado: Implementação Prática em um Sistema de Suspensão Ativa. In: XX Congresso Brasileiro de Automática, 2014, Belo Horizonte. XX Congresso Brasileiro de Automática, 2014.
- [2] S. Boyd, L. Ghaoui, E. Feron, V. Balakrishnan, Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory, 2nd ed., SIAM Studies in Applied Mathematics, 1994.

[3] Barreda, Adrian Eduardo Gonzalez. Investigação experimental de controle robusto aplicado ao problema de rastreamento de pêndulo invertido considerando incertezas politópicas / Adrian Eduardo Gonzalez Barreda. 2020.

[4] M. S. Sadabadi; D. Peaucelle. "From static output feedback to structured robust static output feedback: A survey". Annual Reviews in Control, Oxford, v. 42, p. 11–26, 2016.

### TITLE IN ENGLISH:

#### CONTROL OF DYNAMIC SYSTEMS WITH PARTIALLY AVAILABLE STATE VARIABLES - APPLICATION IN 1/4 ACTIVE SUSPENSION

**Abstract:** This article presents a robust control design  $H_\infty$ , with application in 1/4 of a vehicle's active suspension, for a class of linear dynamic systems. The design is based on quadratic Lyapunov function and LMIs (Linear Matrix Inequalities). The motivation is to show a control analysis with polytopic uncertainties between dynamical systems and classical control techniques.

**Keywords:** Robust Control, Robust  $H_\infty$  Control, Polytopic Uncertainties, Active Suspension System.