

CONTROLE ROBUSTO DE SISTEMAS DINÂMICOS COM VARIÁVEIS DE ESTADO PARCIALMENTE DISPONÍVEIS

Lucas Padilha dos Santos¹, Diogo Ramalho de Oliveira¹, Lucas Rangel de Oliveira¹, Edson Ítalo Mainardi Júnior¹

¹Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia de Mato Grosso do Sul (IFMS) - Três Lagoas - MS

luccas_life@outlook.com, diogo.ramalho@ifms.edu.br, lucas.rangel@ifms.edu.br, edson.mainardi@ifms.edu.br

Resumo

Diversas técnicas de controle têm sido desenvolvidas com o objetivo de garantir estabilidade e melhorar o desempenho de sistemas dinâmicos. Dentre essas técnicas, pode-se citar o controle robusto para sistemas com variáveis de estado parcialmente disponíveis, aplicando o observador de estado e um filtro H_∞ , tendo como objetivo estimar um vetor de estado e filtrar este sistema sujeito a distúrbios, como será utilizado nesse trabalho. Além disso, o projeto de controle via realimentação de estado utiliza o controle H_∞ para mitigar o efeito de um distúrbio externo na saída do sistema e a D-Estabilidade para garantir um desempenho dinâmico adequado e restringir a norma do controlador. As condições de projeto são dadas através de desigualdades matriciais lineares (do inglês, *Linear Matrix Inequalities* - LMIs). As LMIs são solucionadas utilizando o *software* Matlab, assim como, às simulações, afim de validar a metodologia proposta.

Palavras-chave: LMIs, observador de estado, suspensão ativa.

Introdução

O sistema dinâmico a ser controlado é a suspensão ativa, pertencente ao Laboratório de Pesquisa em Controle (LPC) da UNESP – Campus Ilha Solteira, que está apresentado na Figura 1. O sistema de suspensão ativa é fabricado pela Quanser® e seu modelo esquemático está representado na Figura 2.



Figura 1. Sistema suspensão ativa pertencente ao LPC – UNESP-Ilha Solteira.

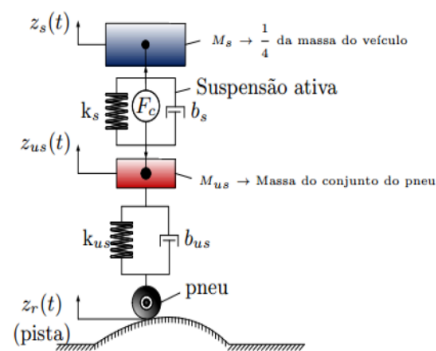


Figura 2. Modelo esquemático da suspensão ativa fabricado pela Quanser®.

O equipamento utilizado possui três placas:

- Placa inferior (cinza): representa a pista pela qual o carro irá se mover;
- Placa do meio (vermelha): representa o chassi do carro;
- Placa superior (azul): representa o assento do motorista.

As posições das placas cinza, vermelha e azul são representadas por $z_r(t)$, $z_{us}(t)$, e $z_s(t)$, respectivamente todas essas posições são medidas através de *encoders*.

Além disso, para a representação do sistema apresentado na Figura 2, os parâmetros são apresentados de forma detalhada no Quadro 1, de acordo com o manual da Quanser® (Active suspension, 2009).

Quadro 1. Parâmetros do sistema suspensão ativa.

Parâmetros	Símbolo	Valor
Constante de rigidez da mola (N/m)	k_s	900
	k_{us}	2500
$\frac{1}{4}$ da massa total do veículo (kg)	M_s	2,45
Massa do conjunto do pneu (kg)	M_{us}	1
Coeficiente de amortecimento (Ns/m)	b_s	7,5
	b_{us}	5

Metodologia

O sistema de suspensão ativa é representado por um sistema linear invariante no tempo sujeito a ruído, sendo apresentado através de espaço de estados, dado por:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Hw(t) \quad (1)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) + Gw(t) \quad (2)$$

sendo que $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado, $\dot{x} \in \mathbb{R}^n$ é a derivada temporal do vetor de estado $x(t)$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ é o sinal de controle, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ é a saída do sistema, $w(t) \in \mathbb{R}^q$ que é uma entrada exógena de energia limitada e $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $H \in \mathbb{R}^{n \times q}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$, $G \in \mathbb{R}^{p \times q}$ e são matrizes de dimensão adequada.

O sistema de suspensão ativa da Figura 2 pode ser representado matematicamente por (1) e (2) (de OLIVEIRA et al., 2014), sendo que:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -\frac{k_s}{M_s} & -\frac{b_s}{M_s} & 0 & \frac{b_s}{M_s} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_s}{M_{us}} & \frac{b_s}{M_{us}} & -\frac{k_{us}}{M_{us}} & -\frac{b_s + b_{us}}{M_{us}} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{M_{us}} \end{bmatrix},$$

$$C = [1 \ 0 \ 0 \ 0], D = 0, G = 0,$$

$$H = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ \frac{b_{us}}{M_{us}} \end{bmatrix}, x(t) = \begin{bmatrix} z_s(t) - z_{us}(t) \\ \dot{z}_s \\ z_{us}(t) - z_r(t) \\ \dot{z}_{us} \end{bmatrix}$$

$$u(t) = F_c(t), w(t) = \dot{z}_r(t), y(t) = z_s(t) - z_{us}(t).$$

Substituindo os valores das constantes do sistema (M_s , M_{us} , k_s , k_{us} , b_s e b_{us}) nas matrizes A , B , H e C tem-se:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ -367,35 & -3,06 & 0 & 3,06 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 900 & 7,5 & -2500 & -2,5 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,40 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}, C = [1 \ 0 \ 0 \ 0].$$

Controlabilidade, Observabilidade e Detectabilidade

Controlabilidade (NISE, 2013) Se para um sistema for possível obter uma entrada capaz de transferir todas as variáveis de estado de um estado inicial desejado para o estado final desejado, o sistema é dito controlável; caso contrário, o sistema é não controlável.

Uma forma de afirmar se o sistema é controlável ou não, é através da matriz de controlabilidade. Um sistema de ordem n , dado por (1) e (2), é completamente controlável se a matriz:

$$C_M = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B] \quad (3)$$

for de posto completo, na qual C_M é chamada matriz de controlabilidade. Caso o determinante da matriz C_M seja diferente de zero $\det(C_M) \neq 0$, é dito como controlável.

Observabilidade (NISE, 2013) Se o vetor de estado inicial $x(t_0)$, puder ser obtido a partir de $u(t)$ e $y(t)$ medidos durante um intervalo de tempo finito a partir de t_0 , o sistema é dito observável; caso contrário o sistema é não observável.

Uma forma de confirmar se o sistema é observável, é através da matriz de Observabilidade. Um sistema de ordem n , dado por (1) e (2), é totalmente observável se a matriz:

$$O_M = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (4)$$

for de posto completo, em que O_M é a matriz de observabilidade. Caso o determinante da matriz O_M seja diferente de zero $\det(O_M) \neq 0$, o sistema é dito como observável.

Detectabilidade (CHEN, 1995) Um sistema é dito detectável se todos os estados não observáveis, se existirem, forem estáveis.

Observador de estado via LMIs

Uma forma de tratar do controle de sistemas com variáveis de estado que não estão completamente disponíveis, é utilizar observadores de estado para estimar um vetor de estado $\hat{x}(t)$, denominado vetor de estado estimado. Dessa forma, a partir de (1) e (2) e considerando $w(t) = 0$, tem-se o sistema utilizando o observador:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - \hat{y}(t)) \quad (5)$$

$$\hat{y}(t) = C\hat{x}(t) + Du(t) \quad (6)$$

Sendo que L é o ganho do observador e utiliza a realimentação do erro da saída $(y(t) - \hat{y}(t))$. O erro de estimação de estado $e(t)$ é definido por:

$$e(t) = x(t) - \hat{x}(t) \quad (7)$$

Considere o observador clássico de Luenberger, tal que $w(t) = 0$ para o sistema (1) e (2). A partir de (7), tem-se que a derivada do erro de estimação de estados é:

$$\dot{e}(t) = (A - LC)e(t) \quad (8)$$

A seguir, para $w(t) \neq 0$, utilizando a definição do sistema (1)-(2) e a definição do observador de Luenberger em (8), calcula-se a dinâmica do erro $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$.

$$\dot{e}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\hat{x}}(t) = (A - LC)e(t) + (H - LG)w(t), \quad (9)$$

Além disso, considere o erro da saída, $e_y(t)$, dado por:

$$e_y(t) = y(t) - \hat{y}(t) = C(x(t) - \hat{x}(t)) = Ce(t) \quad (10)$$

Filtro H_∞

De acordo com Pinto, 2015 o termo H_∞ é usado em controle para representar o espaço de Hardy das funções de transferência estritamente próprias, entretanto a norma H_∞ ,

diferentemente da norma-2, em sistema SISO, é a amplitude máxima da resposta em todo espectro de frequência. Em sistemas MIMO, a norma H_∞ é o máximo valor singular da matriz de transferência, ou, em outras palavras, é o ganho máximo do sistema em todas as direções de entrada e em todas as frequências. A principal vantagem do filtro H_∞ é que o distúrbio de entrada não precisa ser ruído branco, basta ser limitado.

Teorema 1 (PINTO, 2015) *Seja (9)-(10), onde o par (A, C) é detectável. Se existem matrizes P e Q tais que:*

$$\min \gamma_L$$

sujeito a

$$P > 0$$

$$\begin{bmatrix} PA + A^T P - QC - C^T Q^T & PH - QG & C^T \\ (PH - QG)^T & -\gamma_L I & 0 \\ C & 0 & -\gamma_L I \end{bmatrix} < 0,$$

sendo que $Q = PL$, o sistema é exponencialmente estável e $\gamma_L > 0$ é um limitante superior para

$$J = \sup_{w(t) \neq 0} \frac{\|e_y(t)\|_2}{\|w(t)\|_2}$$

tal que

$$\int_0^\infty e_y^T(t) e_y(t) dt - \gamma_L^2 \int_0^\infty w^T(t) w(t) dt < 0.$$

Projeto de controle H_∞

Considere a lei de controle clássica para a realimentação do vetor de estado, dada por (BOYD et al., 1994):

$$u(t) = -Kx(t) \quad (11)$$

Substituindo (11) no sistema (1) e (2), tem-se:

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) + Hw(t), \quad (12a)$$

$$y(t) = (C - DK)x(t) + Gw(t). \quad (12b)$$

Teorema 2 (BOYD et al., 1994) *O sistema (12) é assintoticamente estável se, dado um escalar $\mu > 0$, existirem matrizes $X = X^T > 0$ e M , de dimensões adequadas, satisfazendo o seguinte problema de otimização:*

$$\min \mu$$

sujeito a

$$X = X^T > 0$$

$$\begin{bmatrix} AX + XA^T - BM - M^T B^T & H & -M^T D^T \\ H^T & -\mu I & G^T \\ (XC^T - M^T D^T)^T & G & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (13)$$

sendo $\gamma_K = \sqrt{\mu} > 0$. A matriz de ganho de realimentação é dada por $K = MX^{-1}$ e assegura $\|H(s)\|_\infty \leq \sqrt{\mu}$.

D-Estabilidade

Diversas vezes é necessário que os autovalores de malha fechada do sistema estejam alocados dentro de uma determinada região de interesse, com o propósito de assegurar limites para o *overshoot* máximo, o tempo de subida e o tempo de estabelecimento. Essa região $S(\alpha, r, \theta)$, vista na Figura 3, é definida em (CHILALI AND GAHINET, 1996) e utiliza o conceito de D-estabilidade para a alocação dos autovalores.

Nessa região, os autovalores complexos de um sistema da forma $x \pm jy$ satisfazem:

$$x < -\alpha < 0 \quad (14)$$

$$|x \pm jy| < r \quad (15)$$

$$\tan(\theta) x < -|y| \quad (16)$$

Quando os autovalores de um sistema de segunda ordem pertencem à região $S(\alpha, r, \theta)$, o sistema realimentado possui taxa de decaimento α mínima, coeficiente de amortecimento $\zeta > \cos(\theta)$ mínimo e frequência amortecida $\omega_d < r \sin(\theta)$ máxima (CHILALI, GAHINET, 1996).

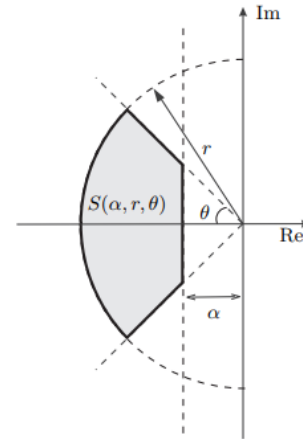


Figura 3. Região $S(\alpha, r, \theta)$ para alocação de autovalores.

O teorema a seguir apresenta uma condição suficiente para restringir os autovalores, em malha fechada, na região $S(\alpha, r, \theta)$.

Teorema 3 (CHILALI, GAHINET, 1996) *O sistema (12), com a lei de controle $u(t) = -Kx(t)$ possui autovalores na região $S(\alpha, r, \theta)$ se existirem as matrizes $X = X^T > 0$ e M , de dimensões adequadas, tais que:*

$$AX + XA^T - BM - M^T B^T + 2\alpha X < 0, \quad (17)$$

$$\begin{bmatrix} -rX & AX - BM \\ (AX - BM)^T & -rX \end{bmatrix} < 0, \quad (18)$$

$$\begin{bmatrix} \Gamma & \cos(\theta)(AX - XA^T - BM + M^T B^T) \\ * & \Gamma \end{bmatrix} < 0. \quad (19)$$

sendo $\Gamma = \sin(\theta)(AX + XA^T - BM - M^T B^T)$, $\ast = \cos(\theta)(AX - XA^T - BM + M^T B^T)^T$ e a matriz de ganho de realimentação é dada por $K = MX^{-1}$.

Juntos, os Teoremas 2 e 3 permitem o projeto de um controlador robusto H_∞ que utiliza um ganho K para $\mathcal{D}$ -estabilizar o sistema realimentado. Já o Teorema 1 permite projetar um observador de estado / filtro H_∞ para estimar o vetor de estado. Com isso, caso o sistema seja controlável e observável, é possível projetar o controlador K e o observador L .

Resultados e Discussão

Inicialmente, para verificar se o sistema é controlável utilizando o Matlab é possível encontrar a seguinte matriz:

$$C_M = \begin{bmatrix} 0 & 1,408 & -19,872 & -3997 \\ 0,408 & -4,310 & -456,45 & 19535 \\ 0 & -1 & 15,561 & 3540,5 \\ -1 & 15,561 & 3540,5 & -1,044e^5 \end{bmatrix}$$

Logo, temos que o determinante da matriz C_M , é:

$$\det(C_M) = 1,041 \times 10^6$$

Em seguida, é necessário verificar se o sistema é observável, com isso, encontra-se a seguinte matriz:

$$O_M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1267,3 & -10,561 & 2500 & 15,561 \\ 17885 & -1118,3 & -38903 & 3540,5 \end{bmatrix}$$

Logo, o determinante da matriz do observador:

$$\det(O_M) = 6,25 \times 10^6$$

Note que, o sistema é observável e controlável.

Com isso, a partir do Teorema 1, as condições das LMIs foram resolvidas utilizando o Matlab/Yalmip/Sedumi para $\gamma_L = 9,816 \times 10^{-5}$ e foi encontrado o ganho do observador L , tal que:

$$L = \begin{bmatrix} 1580,6 \\ -5205,8 \\ 4,0483 \times 10^5 \\ -3,0195 \times 10^6 \end{bmatrix} \quad (20)$$

Resolvendo as LMIs apresentadas nos Teoremas 2 e 3 utilizando $\alpha = 10$, $r = 42$ e $\theta = 90^\circ$, foram obtidos o ganho do controlador K , a matriz simétrica positiva definida e o limitante γ_K :

$$K = [-245,13 \quad 65,655 \quad 212,92 \quad -37,771], \quad (21)$$

$$P = \begin{bmatrix} 8515,9 & 686,94 & 50,792 & 10,162 \\ 686,94 & 227,76 & -0,20319 & -0,034746 \\ 50,792 & -0,20319 & 1,2515 & 0,20307 \\ 10,162 & -0,034746 & 0,20307 & 0,034742 \end{bmatrix},$$

$$\|H(s)\|_\infty \leq \gamma_k = \sqrt{\mu} = 0,053095.$$

Simulação do sistema suspensão ativa

Utilizando o Matlab/Simulink, simulou-se a resposta em frequência do sistema em malha aberta e o sistema realimentado aplicando as técnicas de controle robusto sujeito a ruído com H_∞ . Para isso, a forma de onda do sinal de entrada da pista ($z_r(t)$) foi escolhido como um sinal *chirp* (onda senoidal com frequência variável) de amplitude de $1,5\text{mm}$ e com frequência que varia linearmente de 1Hz a 12Hz em 10s . As Figuras 4 e 5 apresentam simulações da resposta temporal do sistema em malha aberta.

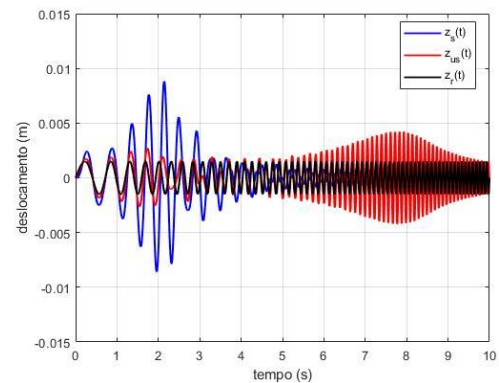


Figura 4. Simulação da resposta temporal do sistema em malha aberta, sendo que as posições plotadas são as posições reais do sistema.

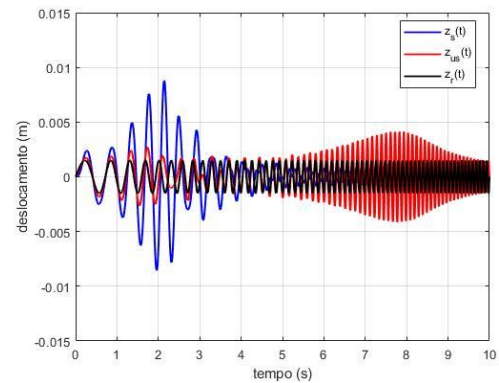


Figura 5. Simulação da resposta temporal do sistema em malha aberta, sendo que as posições plotadas são as posições estimadas do sistema.

Note que as Figuras 4 e 5 apresentam respostas dinâmicas semelhantes. Na prática, em um sistema real, não seria possível plotar a Figura 4, pois as posições reais do sistema não estariam todas disponíveis. Em outras palavras, só foi possível plotar a Figura 4, pois os resultados foram obtidos via simulação. Já a Figura 5 utiliza o ganho L calculado anteriormente (dado em (20)) para estimar o vetor de estado e, consequentemente, as posições das placas do sistema de suspensão ativa. Por fim, a comparação entre as Figuras 4 e 5 são importantes para comprovar a validade do observador/filtro H_∞ utilizado.

A Figura 6 apresenta uma simulação da resposta temporal do sistema em malha fechada, sendo realimentado a partir do vetor de estado estimado com o ganho do observador L e do controlador K calculados e dados em (20) e (21). Assim como a Figura 5, as posições plotadas na Figura 6 são obtidas a partir do vetor de estado estimado.

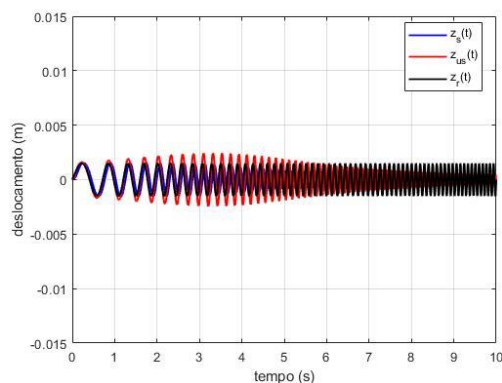


Figura 6. Simulação da resposta temporal do sistema em malha fechada, sendo realimentado a partir do vetor de estado estimado com o ganho L e K .

Nota-se que o sistema em malha aberta (ver Figura 5) sem a realimentação do vetor de estado estimado apresenta grandes oscilações se comparado às posições demonstradas na Figura 6, no qual o sistema está operando em malha fechada utilizando o ganho K . Validando assim o projeto do controlador que utiliza o vetor de estado estimado.

Nas Figuras 7 e 8, para os sistemas em malha aberta e malha fechada, respectivamente, são apresentados o sinal de saída real do sistema em malha aberta ($y(t)$, em azul), o sinal de saída estimado ($\hat{y}(t)$, em vermelho) e a diferença entre os sinais ($y(t) - \hat{y}(t)$, em preto). Observa-se que a diferença entre a saída real do sistema e saída estimada possui comportamento similar com uma pequena diferença.

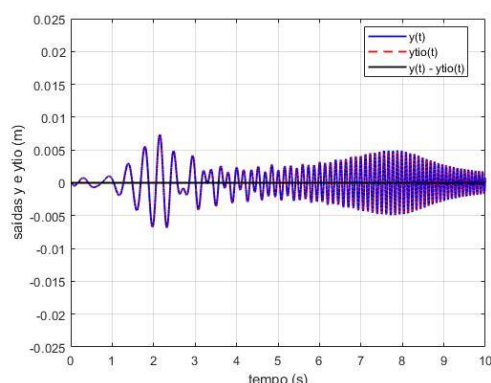


Figura 7. Simulação da resposta do sinal real, sinal de saída estimado e a diferença entre os sinais de saída do sistema suspensão ativa em malha aberta.

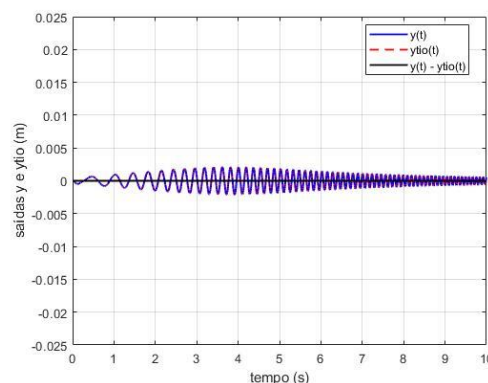


Figura 8. Simulação da resposta do sinal real, sinal de saída estimado e a diferença entre os sinais de saída do sistema suspensão ativa em malha fechada.

Note que a simulação do sistema em malha aberta e em malha fechada apresentam ambos os comportamentos similares para o sinal de saída real e sinal de saída estimado. Sendo que, mesmo o sistema em malha aberta, este utiliza o ganho do observador, e para o sistema em malha fechada, é aplicado o controlador, garantindo comportamento menos oscilatório, melhor desempenho e picos menores.

A Figura 9 apresenta a simulação do sinal de controle utilizando a realimentação do vetor de estado estimado no sistema suspensão ativa, da mesma simulação das Figura 6 e 7. Observa-se que o valor máximo aplicado no atuador é de aproximadamente $(\pm 3,5 N)$, sendo que o limitante de saturação é de $(\pm 39,2 N)$.

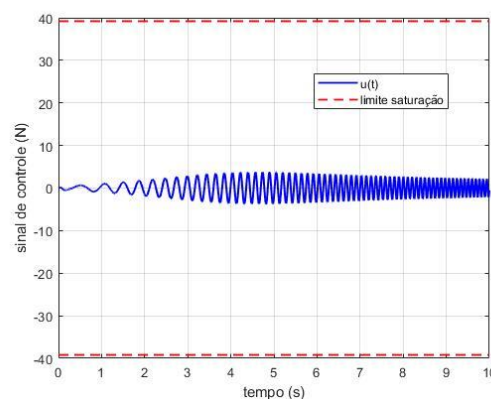


Figura 9. Simulação do sinal de controle (azul) utilizando a realimentação do vetor de estado estimado e a indicação dos valores máximo e mínimo que o atuador pode atingir (vermelho).

Considerações Finais

No sistema de suspensão ativa foi possível projetar um observador/filtro H_∞ e um controlador, pois o sistema atendia aos critérios de observabilidade e controlabilidade

como é apresentado em NISE, 2013. O observador/filtro H_∞ permitiu estimar o vetor de estado a partir da saída do sistema, mesmo para um sistema sujeito a distúrbios externos. Além disso, o controlador permitiu mitigar a influência desse distúrbio na saída do sistema. A utilização de LMIs facilita o projeto de controle, uma vez que é possível acrescentar critérios de desempenho, sem que haja aumento na complexidade do projeto. Além disso, os resultados de simulação validaram o projeto de controle via LMIs e permitiram apresentar um bom desempenho para o sistema. Considerando o sistema de suspensão ativa sujeito a ruídos utilizado neste trabalho, verificou-se que é possível projetar um controlador robusto sujeito a ruídos, no qual as variáveis de estados estejam parcialmente disponíveis. Dessa forma, é possível aplicar esta metodologia para sistemas com o vetor de estado parcialmente disponível, ou seja, que as variáveis de estados não estão disponíveis ou inviáveis, por motivos financeiros, de segurança ou da construção do equipamento.

Agradecimentos

Ao IFMS/TL pela aquisição do *software* Matlab. UNESP/FEIS/LCP pela utilização do sistema suspensão ativa.

Referências

Boyd, S., Ghaoui, L. E., Feron, E., Balakrishnan, V. **Linear matrix inequalities in system and control theory**. 2. ed. Philadelphia: SIAM Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994.

Chilali, M. and Gahinet, P. (1996). H_∞ design with pole placement constraints: An LMI approach, Automatic Control, IEEE Transactions on **41**(3): 358–367.

de Oliveira, D. R., Teixeira, M. C. M., Assunção, E., de Souza, W. A., Moreira, M. R., Silva, J. H. P. **Projeto de controle robusto H_∞ chaveado: Implementação prática em um sistema de suspensão ativa**, XX Congresso Brasileiro de Automática, 2014.

de Oliveira, D. R., Teixeira, M. C. M., Alves, I. N. L. T., de Souza, W. A., Assunção, E., Cardim, R. **On local H_∞ switched controller design for uncertain T-S fuzzy systems subject to actuator saturation with unknown membership functions**. Fuzzy Sets and Systems, v. 344, p. 1-26, 2018.

Nise, N. S. **Engenharia de sistemas de controle**. 6. ed. – Rio de Janeiro: LTC, 2013.

Pinto, L. P. G. **Estimação de variáveis de estado e parâmetros baseada em observadores chaveados**. " Tese (Doutorado em Engenharia de Automação e Sistemas) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2015.

Quanser. **Active suspension**: user's manual. [S. l.], 2009.