

A implementação no sistema de suspensão ativa está esquematizada na Figura 2.

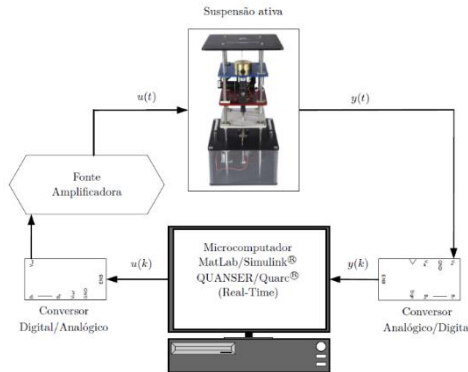


Figura 2. Diagrama utilizado para implementação prática.

A partir da Figura 2, note que a saída ($y(t) = z_s(t) - z_{us}(t)$) é medida e enviada para o computador. Essas informações passam por um conversor Analógico/Digital (A/D), obtendo o sinal discretizado $y(k)$, para que o computador possa interpretar esses dados. A técnica de controle é processada pelo computador, através do *software* MatLab/Simulink, para calcular o sinal de controle discreto $u(k)$. O sinal de controle $u(k)$ passa inicialmente por um conversor Digital/Analógico (D/A) e depois por um amplificador de potência para obter o sinal de controle contínuo $u(t)$ com energia suficiente para alimentar o atuador da suspensão ativa.

Em diversos trabalhos, como por exemplo em (de Oliveira et al., 2014), utiliza-se o modelo contínuo do sistema de suspensão ativa para realizar o projeto de controle. Essa consideração pode ser feita pois o período de amostragem (T_s) utilizado é relativamente pequeno em comparação com a dinâmica do sistema mecânico. Em (de Oliveira et al., 2014) foi utilizado um período de amostragem de $T_s = 1\text{ms}$.

Entretanto, um dos objetivos deste trabalho é realizar um projeto de controle para sistemas em tempo discreto. No projeto de controle e na implementação prática, será considerado um período de amostragem de $T_s = 10\text{ms}$, maior que o tempo de amostragem utilizado em (de Oliveira et al., 2014).

Representação do sistema em tempo discreto

Dessa forma, deseja-se determinar o sistema discreto em espaço de estado equivalente ao sistema contínuo em espaço de estado do sistema de suspensão ativa. Na literatura, existem diversos métodos para realizar essa “discretização”.

Por simplificação, considere que a entrada exógena $w(t) = 0$, tal que o sistema (1) pode ser representado por

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (4)$$

sendo que a resposta temporal deste sistema é dado por

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \quad (5)$$

Utilizando o conversor D/A, tem-se que o sinal de controle pode ser representado por

$$u(t) = u(kT_s) \quad (6)$$

para $kT_s \leq t < (k+1)T_s$, sendo que T_s é o período de amostragem e k é a amostra. Ou seja, o sinal de controle é constante durante o período de amostragem.

Para encontrar a resposta temporal para este tipo de sinal de controle (6), em (5) considere que $t = (k+1)T_s$ e $t_0 = kT_s$, tal que

$$x((k+1)T_s) = e^{AT_s}x(kT_s) + \int_{kT_s}^{(k+1)T_s} e^{A((k+1)T_s-\tau)}Bu(\tau)d\tau \quad (7)$$

Como $u(\tau)$ é constante durante o intervalo de integração, (7) pode ser rescrito como

$$x((k+1)T_s) = e^{AT_s}x(kT_s) + \int_{kT_s}^{(k+1)T_s} e^{A((k+1)T_s-\tau)}d\tau Bu(kT_s) \quad (8)$$

Fazendo a seguinte mudança de variável

$$\eta = [(k+1)T_s - \tau]$$

Tem-se que $d\eta = -d\tau$, para $\tau = kT_s$ tem-se $\eta = T_s$ e para $\tau = (k+1)T_s$ tem-se $\eta = 0$. Logo (8) pode ser rescrito como

$$x((k+1)T_s) = e^{AT_s}x(kT_s) + \int_0^{T_s} e^{A\eta}d\eta Bu(kT_s) \quad (9)$$

Omitindo o período de amostragem T_s dos termos $x((k+1)T_s)$, $x(kT_s)$ e $u(kT_s)$, pode-se escrever (9) como

$$x(k+1) = \mathbb{A}x(k) + \mathbb{B}u(k) \quad (10a)$$

sendo que

$$\mathbb{A} = e^{AT_s} \quad \text{e} \quad \mathbb{B} = \int_0^{T_s} e^{A\eta}d\eta B \quad (10b)$$

ou seja, o sistema em tempo contínuo dado em (4) pode ser representado pelo sistema em tempo discreto dado em (10), considerando o período de amostragem T_s . Note que o período de amostragem T_s interfere no modelo em espaço de estado em tempo discreto (10).

Aparentemente, os cálculos de \mathbb{A} e \mathbb{B} são complexos. Entretanto, o SciLab e o MatLab realizam estes cálculos utilizando o comando “dscr” e “c2d”, respectivamente.

Estudo da estabilidade do sistema

Primeiramente deve-se investigar a estabilidade do sistema em tempo discreto em malha aberta, ou seja, $u(k) = 0$. O sistema dado em (10) pode ser reescrito como

$$x(k+1) = \mathbb{A}x(k) \quad (11)$$

O sistema linear em tempo discreto dado em (11) é assintoticamente estável se qualquer uma das condições abaixo for verificada:

- $\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) \rightarrow 0$, condição inicial $x(0)$ arbitrária

- $\max_i |\lambda_i(A)| < 1, \quad i \in \{1, \dots, n\}$

sendo que $\lambda(A)$ representa os autovalores da matriz A . O SciLab e o MatLab calculam os autovalores de uma matriz utilizando o comando “spec” e “eig”, respectivamente.

A estabilidade do sistema (11) (ou simplesmente a estabilidade de A) pode ser também investigada por meio de uma função de Lyapunov $V(x(k))$. Para que o sistema seja assintoticamente estável no sentido de Lyapunov, duas condições devem ser verificadas:

$$V(x(k)) > 0, \quad \forall x(k) \neq 0$$

$$V(x(k+1)) - V(x(k)) < 0, \quad \forall x(k) \neq 0$$

Considerando uma função de Lyapunov do tipo quadrática, dada por

$$V(x(k)) = x(k)^T P x(k)$$

sendo que $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz simétrica, tem-se que

$$V(x(k)) = x(k)^T P x(k) > 0, \forall x(k) \neq 0 \Leftrightarrow P > 0$$

$$\begin{aligned} V(x(k+1)) - V(x(k)) &= x(k+1)^T P x(k+1) - x(k)^T P x(k) \\ &= x(k)^T (A^T P A - P) x(k) < 0 \\ &\Leftrightarrow A^T P A - P < 0 \end{aligned}$$

Observe que uma matriz $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é definida positiva se $x(k)^T P x(k) > 0, \forall x(k) \neq 0$ o que implica que todos os autovalores (ou que todos os menores principais líderes) de P devem ser positivos. Além disso, tem-se que $A^T P A - P$ é definida negativa se $-(A^T P A - P) > 0$.

O chamado Teorema de Lyapunov adaptado para o caso de sistemas lineares em tempo discreto pode ser formulado diretamente em termos de LMIs (Boyd, 1994).

Teorema 1 (Lyapunov) *As trajetórias de $x(k+1) = Ax(k)$ convergem para a origem se e somente se existir uma matriz definida positiva $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que $A^T P A - P < 0$. Nesse caso, diz-se que o sistema é assintoticamente estável.*

Projeto de controle usando LMIs

De forma geral, o projeto de controle para um sistema dinâmico é realizado quando:

- O sistema em malha aberta é instável;
- O sistema em malha aberta é estável, porém apresenta um desempenho dinâmico insatisfatório.

As LMIs também podem ser utilizadas no projeto de uma lei de controle para o sistema dinâmico, de forma que o controlador projetado estabilize assintoticamente o sistema dinâmico. Além disso, é possível inserir uma restrição denominada taxa de decaimento ($\rho > 0$), que está diretamente relacionada ao tempo de estabilização do sistema em malha fechada.

Uma lei de controle bastante utilizada é dada por

$$u(k) = Kx(k) \quad (12)$$

sendo que $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Dessa forma, o sistema (10) em malha fechada, utilizando a lei de controle (12), pode ser representado por

$$x(k+1) = (A + BK)x(k) \quad (13)$$

A estabilidade do sistema (13) (ou simplesmente a estabilidade do sistema em malha fechada $(A + BK)$) pode ser também investigada por meio de uma função de Lyapunov $V(x(k))$. Para que o sistema seja assintoticamente estável no sentido de Lyapunov e possua taxa de decaimento ρ , duas condições devem ser verificadas:

$$V(x(k)) > 0, \quad \forall x(k) \neq 0$$

$$V(x(k+1)) - \rho^2 V(x(k)) < 0, \quad \forall x(k) \neq 0$$

Considerando uma função de Lyapunov do tipo quadrática, dada por

$$V(x(k)) = x(k)^T P x(k)$$

sendo que $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é uma matriz simétrica, tem-se que

$$V(x(k)) = x(k)^T P x(k) > 0, \forall x(k) \neq 0 \Leftrightarrow P > 0$$

$$\begin{aligned} V(x(k+1)) - \rho^2 V(x(k)) &= x(k+1)^T P x(k+1) - \rho^2 x(k)^T P x(k) \\ &= x(k)^T ((A + BK)^T P (A + BK) - \rho^2 P) x(k) < 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (A + BK)^T P (A + BK) - \rho^2 P < 0$$

Aplicando o complemento de Schur, tem-se

$$\begin{aligned} (A + BK)^T P (A + BK) - \rho^2 P < 0 \\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \rho^2 P & (A + BK)^T P \\ P(A + BK) & P \end{bmatrix} > 0 \end{aligned}$$

Por congruência tem-se

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho^2 P & (A + BK)^T P \\ P(A + BK) & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & P^{-1} \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} \rho^2 P^{-1} & P^{-1}(A + BK)^T \\ (A + BK)P^{-1} & P^{-1} \end{bmatrix} > 0 \end{aligned}$$

Realizando as mudanças de variáveis, tal que $X = P^{-1}$ e $M = KX$, tem-se

$$\begin{bmatrix} \rho^2 X & (AX + BM)^T \\ (AX + BM) & X \end{bmatrix} > 0$$

Observe que a LMI acima está descrita em função de X , tal que $X = P^{-1}$. Logo, a LMI $P > 0$ pode ser substituída por $X > 0$ (pois por congruência $P^{-1} P P^{-1} > 0$ e $P^{-1} P P^{-1} = I_n P^{-1} = P^{-1} = X$, logo $X > 0$).

Teorema 2 (Estabilidade + Taxa de Decaimento) *As trajetórias de $x(k+1) = (A + BK)x(k)$ convergem para*

a origem se e somente se existirem uma matriz definida positiva $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e uma matriz $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tal que

$$\begin{bmatrix} \rho^2 X & (AX + BM)^T \\ (AX + BM) & X \end{bmatrix} > 0$$

Nesse caso, diz-se que o sistema é assintoticamente estável e possui uma taxa de decaimento ρ . O controlador é dado por $K = MX^{-1}$.

Em um projeto de controle utilizando LMIs é comum que o controlador K encontrado pelo software possua ganhos elevados, impossibilitando que este controlador seja utilizado em uma implementação prática. Existem diversas metodologias para a redução da norma do vetor K . Uma das possíveis metodologias é apresentada a seguir.

Teorema 3 (Assunção et. al., 2007) Dada uma constante $\mu_0 > 0$, obtém-se um limitante para a norma do vetor $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ encontrando o valor mínimo de $\beta > 0$, tal que $KK^T < \frac{\beta}{\mu_0} I_m$. Pode-se obter o valor ótimo de β através do seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} & \text{minimize } \beta \\ & \text{sujeito a } \begin{bmatrix} \beta I_m & M \\ M^T & I_n \end{bmatrix} > 0 \quad e \quad X > \mu_0 I_n \end{aligned}$$

sendo $M = KX$, $X = X^T > 0$ e I_m uma matriz identidade de dimensão "m".

Os Teoremas 2 e 3 podem ser utilizados em conjunto para projetar um controlador K implementável na prática, que estabilize e garanta uma taxa de decaimento ρ ao sistema em malha fechada.

Resultados e Considerações Finais

Utilizando o software SciLab, considerando um período de amostragem $T_s = 10\text{ms}$ e as matrizes A e B dadas em (3), as matrizes \mathbb{A} e \mathbb{B} são dadas a seguir. Além disso, são apresentados os autovalores da matriz \mathbb{A} .

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 0,941 & 0,009 & 0,115 & -0,008 \\ -3,419 & 0,953 & -0,496 & 0,043 \\ 0,041 & 0,0004 & 0,883 & 0,008 \\ 7,815 & 0,106 & -22,206 & 0,732 \end{bmatrix},$$

$$\mathbb{B} = \begin{bmatrix} 0,0000655 \\ 0,003799 \\ -0,000046 \\ -0,008683 \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} \lambda_1 &= 0,77 + 0,51i \\ \lambda_2 &= 0,77 - 0,51i \\ \lambda_3 &= 0,97 + 0,15i \\ \lambda_4 &= 0,97 - 0,15i \end{aligned}$$

Note que $\max_i |\lambda_i(\mathbb{A})| < 1$, $i \in \{1, \dots, n\}$, concluindo que o sistema em malha aberta é estável. Além disso, o Teorema 1 apresenta uma solução factível, comprovando novamente que o sistema em malha aberta é estável.

Utilizando o Teorema 2 para $\rho = 0,991$, foi obtida uma solução factível para as LMIs (utilizando o SciLab), e o ganho K encontrado é dado por

$$K = [821,372 \quad -54,832 \quad 94,763 \quad 78,043]$$

Note que, os ganhos do controlador K são elevados, impossibilitando uma implementação prática.

Agora, utilizando o Teorema 2 e 3 para $\rho = 0,991$ e $\mu_0 = 0,9$, foi obtida uma solução factível para as LMIs (utilizando o MatLab da UNESP-LPC), e o ganho K encontrado é dado por

$$K = [51,969 \quad -0,107 \quad 58,858 \quad 0,017]$$

O controlador K foi implementado no sistema de suspensão ativa e o resultado está apresentado na Figura 3.

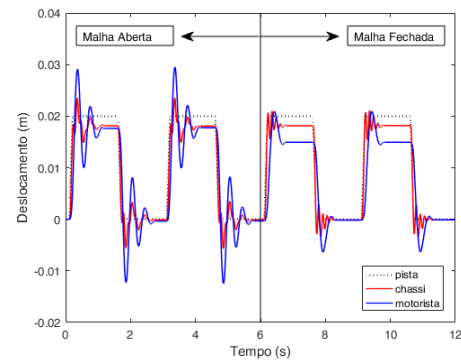


Figura 3. Resposta temporal do sistema de controle em malha aberta e malha fechada.

Note que o sistema em malha aberta é naturalmente estável, porém possui um desempenho dinâmico insatisfatório, pois apresenta muita oscilação. O controlador K projetado através dos Teoremas 2 e 3 garantiram estabilidade e bom desempenho ao sistema em malha fechada. O período de amostragem utilizado na implementação foi de $T_s = 10\text{ms}$.

Agradecimentos

Ao IFMS/TL pelo incentivo financeiro de acordo com o Edital 027/2018 – Propi/IFMS. À UNESP/FEIS por permitir a utilização do LPC, suspensão ativa e software MatLab.

Referências

de Oliveira, D. R., Teixeira, M. C. M., Assunção, E., de Souza, W. A., Moreira, M. R. e Silva, J. H. P. (2014). Projeto de controle robusto H_∞ chaveado: Implementação prática em um sistema de suspensão ativa, XX Congresso Brasileiro de Automática.

Quanser, I. (2009). Active Suspension: User's Manual, Technical report.

S. Boyd; L. E. Ghaoui; E. Feron; V. Balakrishnan. "Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory". 2nd. Ed. [S.l.]: SIAM Studies in Applied Mathematics, 1994. 193 p. (Studies in Applied Mathematics, 15).

E. Assunção; M. C. M. Teixeira; F. A. Faria; N. A. P. D. Silva; R. Cardim. "Robust State-derivative Feedback LMI-based Designs for Multivariable Linear Systems", International Journal of Control, Hants, v.80, n.8, p. 1260-1270, 2007.