

## CONSTRUÇÃO E CARACTERIZAÇÃO DE UMA BANCADA COM UM SISTEMA MASSA-MOLA

Samuel Pereira Braga<sup>1</sup>, Sabrina Viscovini dos Santos<sup>1</sup>, Lucas Rangel de Oliveira<sup>1</sup>, Diogo Ramalho de Oliveira<sup>1</sup>, Edson Italo Mainardi Júnior<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Mato Grosso do Sul – Três Lagoas - MS

samuel.braga@estudante.ifms.edu.br, sabrina.santos3@estudante.ifms.edu.br, lucas.rangel@ifms.edu.br, diogo.ramalho@ifms.edu.br, edson.mainardi@ifms.edu.br

### Resumo

Este trabalho apresenta a construção e caracterização de uma bancada com um sistema massa mola, com o objetivo de contextualizar de forma didática o estudo de um sistema massa-mola-amortecedor, no qual será estudado e analisado suas vibrações e suas características. Deste modo, foram realizadas as etapas de modelagem matemática, equacionamento do movimento do sistema massa-mola, e a formulação em espaço de estados no tempo contínuo e discreto. Então, a construção da bancada e a implementação de um acelerômetro e um Arduino para a detecção dos dados possibilitando a análise do sistema. E após realizou-se a caracterização dos parâmetros necessários para as simulações. Por fim, comparando os resultados simulados obtidos com os resultados experimentais.

**Palavras-chave:** Sistema massa-mola, Modelagem matemática, Decremento logaritmico, Impressão 3D, Arduino.

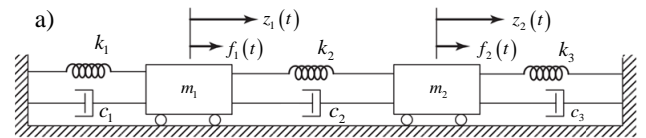
### Introdução

As vibrações são fenômenos que ocorrem de forma natural ou projetada com bastante frequência em várias situações facilmente perceptíveis ou não, tanto em nosso cotidiano quanto em atividades industriais. Sendo assim, seu possui um espaço importante dentro da ciência (RAO, 2008). Dentre diversas outras áreas, percebe-se na Engenharia, cada vez mais a necessidade da análise e compreensão de vibrações em vários projetos, como de máquinas, estruturas, motores, turbinas, entre tantos outros. Obter cada vez mais estudo de vibrações, proporciona o aprimoramento de seu intuito final em aplicações futuras, cujo objetivo é projetar de tal forma que haja segurança, duração e estabilidade. Portanto, o entendimento de suas causas, a influência no meio e a caracterização física são de grande relevância a um futuro profissional de engenharia. Dessa maneira, as atividades em laboratório possuem um papel significativo no processo de ensino-aprendizagem e na formação do educando (BÜHLER et al., 2019).

Desse modo, este projeto apresenta o desenvolvimento e a construção de uma bancada com um sistema massa-mola, apresentando também a modelagem matemática do sistema, com o sensoramento por instrumentação de baixo custo – que pode ser replicada por outras instituições de ensino – a fim de colaborar para o desenvolvimento e publicação de pesquisas na área de vibrações mecânicas e controle de sistemas.

### Metodologia

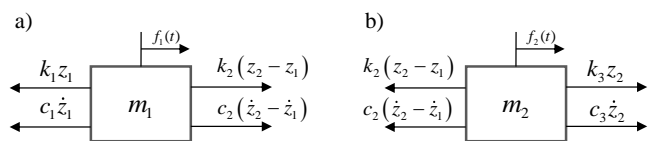
Para analisar o sistema inicialmente é válido ressaltar que o sistema é composto com dois graus de liberdade, ou seja, tem-se que cada corpo terá uma coordenada mínima para descrever seu comportamento, sendo os corpos do sistema denominados de massa 1 e massa 2, ilustrado na Figura 1.



**Figura 1.** Modelo físico de um sistema massa mola com amortecimento.

**Fonte:** Adaptado de RAO (2008).

Na Figura 1, os símbolos  $k_1$ ,  $k_2$  e  $k_3$  denotam os parâmetros de rigidez das molas, enquanto  $c_1$ ,  $c_2$  e  $c_3$  representam os coeficientes que caracterizam o amortecimento. Os deslocamentos lineares das massas são representados por  $z_1$  e  $z_2$ , e as forças externas aplicadas são identificadas como  $f_1$  e  $f_2$ . Na Figura 2, são ilustrados os diagramas de corpo livre (DCLs) para explicitar as forças relacionadas aos componentes com as massas.



**Figura 2.** Diagrama de corpo livre a) massa 1 e b) massa 2.  
**Fonte:** Adaptado de RAO (2008).

Com todas as forças expostas, encontram-se as equações para os dois corpos do sistema, representadas pelas Eqs. (1) e (2). Adotando que as forças para o lado esquerdo serão negativas e para o lado direito serão positivas, as equações do movimento das massas 1 e 2, respectivamente são:

$$f_1(t) + k_2 \cdot (z_2 - z_1) + c_2 \cdot (\dot{z}_2 - \dot{z}_1) - k_1 \cdot z_1 - c_1 \cdot \dot{z}_1 = m_1 \cdot \ddot{z}_1 \quad (1)$$

$$f_2(t) - k_2 \cdot (z_2 - z_1) - c_2 \cdot (\dot{z}_2 - \dot{z}_1) - k_3 \cdot z_2 - c_3 \cdot \dot{z}_2 = m_2 \cdot \ddot{z}_2 \quad (2)$$

Com as duas equações, realiza-se a montagem de um sistema que é mostrado na Eq. (3).

$$\begin{cases} f_1(t) + k_2 \cdot (z_2 - z_1) + c_2 \cdot (\dot{z}_2 - \dot{z}_1) - k_1 \cdot z_1 - c_1 \cdot \dot{z}_1 = m_1 \cdot \ddot{z}_1 \\ f_2(t) - k_2 \cdot (z_2 - z_1) - c_2 \cdot (\dot{z}_2 - \dot{z}_1) - k_3 \cdot z_2 - c_3 \cdot \dot{z}_2 = m_2 \cdot \ddot{z}_2 \end{cases} \quad (3)$$

Reorganizando o sistema em ordem decrescente (maior para o menor) de grau, tem-se como resultado a Eq. (4).

$$\begin{cases} f_1(t) = m_1 \cdot \ddot{z}_1 - c_2 \cdot (\dot{z}_2 - \dot{z}_1) + c_1 \cdot \dot{z}_1 - k_2 \cdot (z_2 - z_1) + k_1 \cdot z_1 \\ f_2(t) = m_2 \cdot \ddot{z}_2 + c_2 \cdot (\dot{z}_2 - \dot{z}_1) + c_3 \cdot \dot{z}_2 + k_2 \cdot (z_2 - z_1) + k_3 \cdot z_2 \end{cases} \quad (4)$$

Esse mesmo sistema pode ser representado de forma matricial, sendo ele mostrado na Eq. (5).

$$\begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{z}_1 \\ \ddot{z}_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Um sistema pode ser composto por várias entradas e saídas, e uma forma de analisar tais sistemas é reduzi-lo, diminuindo a ordem de sua equação, para que a análise desse sistema seja feita de forma adequada e simplificada (Ogata, 2010). Nesse contexto, pode-se representar as equações do movimento na formulação em espaço de estados. O espaço de estados é composto por duas equações, sendo elas:

- i. Equação de estado, mostrada na Eq. (6): é dada a partir da relação da matriz do sistema (matriz  $A$ ) multiplicada pelo vetor de estado (vetor  $x$ ) e a matriz de entrada (matriz  $B$ ) multiplicada pela entrada do sistema (vetor  $u$ );

$$\dot{x} = A \cdot x + B \cdot u \quad (6)$$

- ii. Equação de saída, mostrada na Eq. (7): é dada a partir da relação da matriz de saída (matriz  $C$ ) multiplicada pelo vetor de estado (vetor  $x$ ) e a matriz

de transmissão (matriz  $D$ ) multiplicada pela entrada do sistema (vetor  $u$ ).

$$y = C \cdot x + D \cdot u \quad (7)$$

Para realizar a representação no Espaço de Estados inicialmente são escolhidas as possíveis variáveis do sistema. Visto que o sistema massa-mola analisado é composto por duas equações de 2ª ordem, ele irá possuir duas condições iniciais para cada equação, totalizando quatro condições iniciais no total, conforme é mostrado na Eq. (8). Elas serão os deslocamentos e velocidades de cada equação, cujo objetivo é definir e descrever o estado do sistema dinâmico.

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Tendo como base a equação do movimento e substituindo as relações entre as condições iniciais e as derivadas, tem-se a derivada do vetor de estado. Essa relação é mostrada na Eq. (9).

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \ddot{z}_1 \\ \ddot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{(k_1+k_2)}{m_1} z_1 + \frac{k_2}{m_1} z_2 - \frac{(c_1+c_2)}{m_1} \dot{z}_1 + \frac{c_2}{m_1} \dot{z}_2 + \frac{f_1}{m_1} \\ \frac{k_2}{m_2} z_1 - \frac{(k_3+k_2)}{m_2} z_2 + \frac{c_2}{m_2} \dot{z}_1 - \frac{(c_3+c_2)}{m_2} \dot{z}_2 + \frac{f_2}{m_2} \end{bmatrix} \quad (9)$$

Dessa maneira, pode-se reescrever a Eq. (9) na forma matricial, representando-a conforme a Eq. (10).

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \ddot{z}_1 \\ \ddot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{(k_1+k_2)}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & -\frac{(c_1+c_2)}{m_1} & \frac{c_2}{m_1} \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{(k_3+k_2)}{m_2} & \frac{c_2}{m_2} & -\frac{(c_3+c_2)}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Do mesmo modo, pode construir a equação de saída de forma matricial. A matriz de saída  $C$  depende de quais e quantas saídas do sistema. Apenas como exemplo, é considerada aqui os deslocamentos como resposta. Essa relação é mostrada na Eq. (11).

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

A fim de calcular o vetor de estados e saída computacionalmente, as Eqs (6) e (7) podem ser escritas na forma discreta.

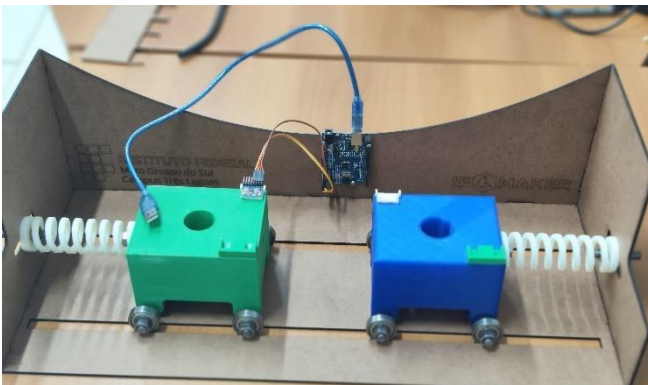
$$x(k+1) = G \cdot x(k) + H \cdot u(k) \quad (12)$$

$$y(k) = C \cdot x(k) + D \cdot u(k) \quad (13)$$

sendo  $G$  a matriz do sistema dinâmico,  $x(k)$  o vetor de estado,  $H$  a matriz de entrada do sistema e  $u(k)$  o vetor de entrada.

Para a parte experimental do projeto, o estudo foi realizado através de uma bancada construída a partir do projeto ID 1312 (“Projeto e construção de bancada para análise dinâmica de sistemas mecânicos”) vinculado ao Edital 030/2021 - Propi / IFMS - Iniciação Científica e Tecnológica - Edital de Pesquisa.

Este sistema é composto por duas massas e três molas feitas com peças fabricadas por impressão 3D, além de ter toda a estrutura de mdf fabricada na impressora a laser. Ele se desloca através de rolamentos que se movem em pequenos trilhos de mdf ao receber uma condição inicial não nula. A bancada e o sistema construído são mostrados na Figura 3.



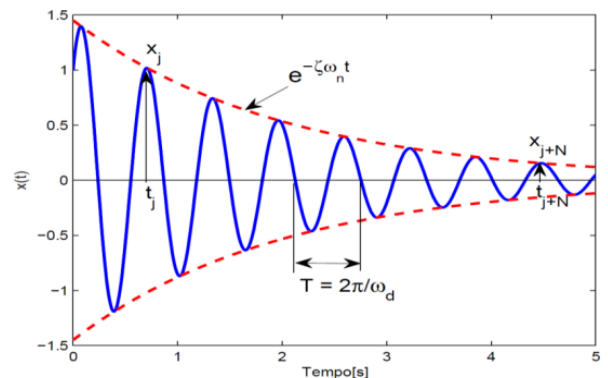
**Figura 3.** Bancada para análise sistemas mecânicos.  
**Fonte:** Elaborado pelo próprio autor (2023).

Como ilustrado na Figura 3, foram utilizados dois sensores acelerômetros 3 Eixos MPU6050 conectados ao Arduino Uno. Esse sensor é comumente utilizado para realizar medições de aceleração, giro e temperatura de um objeto em três eixos (X, Y, Z). Neste projeto, a análise se limita ao eixo longitudinal (eixo Y).

O coeficiente de amortecimento, uma das propriedades mais sensíveis de materiais e estruturas, e responsável pela perda de energia de um material quando entra em contato direto com outro (Ribeiro et al., 2021). Dentre as classificações, no presente projeto, tem-se o amortecimento estrutural, cujo resultado é obtido através da dissipação de energia mecânica

causada pelo movimento relativo entre componentes e/ou por impacto intermitente nas articulações de um sistema mecânico e sua estrutura. Para determinar o amortecimento podemos obtê-lo a partir de dois caminhos diferentes: mediante a duração de uma resposta do sistema após ter uma excitação externa e mediante a uma função da resposta do sistema em relação a frequência.

O sistema analisado, ao receber uma condição inicial não nula, emite como resposta seu comportamento subamortecido. Sabendo dessa análise, será utilizado o método do decaimento logarítmico como método para esse parâmetro a partir da atenuação do gráfico da resposta dada pelo sistema. (Cossolino e Pereira, 2010). O método do decaimento logarítmico consiste em encontrar a razão entre duas amplitudes sequenciais do sinal, sendo elas consequências de um sinal de entrada (impulso) no sistema uma vez que por ter amortecimento viscoso sua resposta é gerada em forma de decaimento em relação ao tempo contínuo, conforme é ilustrado na Figura 4 (Cossolino e Pereira, 2010).



**Figura 4.** Resposta livre de um sistema amortecido.  
**Fonte:** Silva (2019).

Os parâmetros que serão o ponto inicial da análise e do cálculo de nossos valores estão representados no gráfico.  $X_j$  é a amplitude da primeira amostra e  $t_j$  é o início do período, enquanto  $X_{j+N}$  ( $N$  sendo o número de ciclos dentro da análise) é a amplitude da última amostra e  $t_{j+N}$  é o final período de análise.

Aplicando o método de decaimento logarítmico, tem-se como resultado da relação entre as amplitudes a Eq. (14).

$$\delta = \frac{1}{N} \cdot \ln \left( \frac{X_j}{X_{j+N}} \right) \quad (14)$$

Relacionando o decaimento com o coeficiente de amortecimento  $\zeta$ , tem-se como resultado a Eq. (15).

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 - 4\pi^2}} \quad (15)$$

Com o fator de amortecimento, tem-se a relação com a frequência natural não amortecida e com o período da oscilação  $T$ , mostrada pela Eq. (16).

$$\delta = \zeta \omega_n T \quad (16)$$

Com os resultados acima, encontra-se a frequência natural amortecida ( $\omega_d$ ) pela Eq. (17).

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (17)$$

Analisando a equação de movimento, tem-se suas raízes que podem ter resultados de três formas diferentes. Nesses casos, é conveniente definir o coeficiente de amortecimento crítico a partir da relação mostrada na Eq. (18).

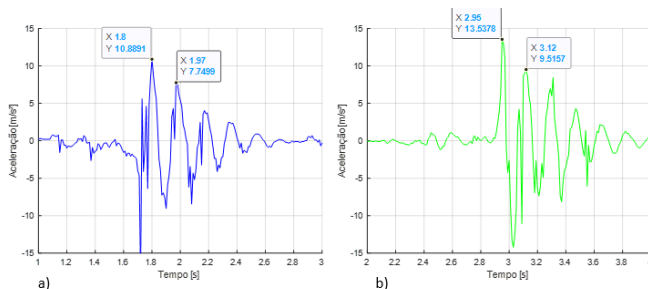
$$c_{cr} = 2m\omega_n \quad (18)$$

E a partir dela, tem-se a relação com o fator de amortecimento com o amortecimento ( $c$ ), conforme é mostrado pela Eq. (19).

$$\zeta = \frac{c}{c_{cr}} \quad (19)$$

## Resultados e Discussão

No Arduino, tem-se a conexão dos sensores possibilitando a programação e recepção dos sinais capturados pelos sensores alocados nas massas do sistema. Para aplicar o método do decaimento logarítmico, o sistema foi transformado em um sistema com 1 gdl a fim de obter as respostas de cada massa separadamente através de uma condição inicial de deslocamento (Stanzani e Bergamaschine, 2018). O deslocamento para os testes foram de 30 mm.



**Figura 5.** Resposta à condição inicial da a) massa 1 e da b) massa 2.

**Fonte:** Elaborado pelo próprio autor (2023).

A partir dos pontos de pico ilustrados na Figura 5, calcula-se, os parâmetros necessários aplicando o método do decaimento logarítmico. Destaca-se ainda que massa 1 é considerada curva azul do sistema e massa 2 a curva verde. Pela Eq. (14), calculou-se o decaimento logarítmico, sendo calculado em seguida o fator de amortecimento utilizando a Eq. (15), para então calcular a frequência natural de acordo com a Eq. (16) e frequência natural amortecida pela Eq. (17). Todos os resultados dos cálculos são expostos tabela 1 para a analisar a Figura 5a e tabela 2 para a analisar a Figura 5b.

**Tabela 1.** Cálculo do amortecimento das molas da massa 1.

Parâmetros analisados	Valores calculados
$X_j = 10,88$	$\delta = 0,340$
$X_{j+N} = 7,74$	$\zeta = 0,054$
$t_j = 1,80$	$\omega_n = 36,88$
$t_{j+N} = 1,97$	$\omega_d = 36,83$
$N = 1$	

**Fonte:** Elaborado pelo próprio autor (2023).

**Tabela 2.** Cálculo do amortecimento das molas da massa 2.

Parâmetros analisados	Valores calculados
$X_j = 13,53$	$\delta = 0,352$
$X_{j+N} = 9,51$	$\zeta = 0,056$
$t_j = 2,95$	$\omega_n = 36,88$
$t_{j+N} = 3,12$	$\omega_d = 36,82$
$N = 1$	

**Fonte:** Elaborado pelo próprio autor (2023).

Com todos os valores calculados nas tabelas anteriores, utiliza-se o resultado do fator de amortecimento e a frequência natural não amortecida para calcular o amortecimento crítico a partir da Eq. (18) e o amortecimento de acordo com a Eq. (19), obtendo como resultado os valores encontrados na Tabela 3.

**Tabela 3.** Coeficiente de amortecimentos para cada massa.

Valores	$m_1$	$m_2$
$c_{cr}$	29,23	24,86
$C$	1,58	1,39

**Fonte:** Elaborado pelo próprio autor (2023).

Observando os DCLs das Figura 2 e a matriz de amortecimento da Eq. (5), percebe-se que, no sistema acoplado, o amortecimento equivalente para cada massa é a soma dos dois coeficientes, sendo assim, o valor de cada coeficiente é a metade do seu valor. Ao analisar a resposta sistema, nota-se uma pequena diferença dos valores dos coeficientes de amortecimento devido à diferença encontrada na frequência natural de cada massa. Essas distinções possivelmente são resultantes da diferença de movimento dos rolamentos e diferenças na fabricação das molas impressas, já que vários parâmetros podem influenciar na impressão 3D.

O último parâmetro analisado é a constante de rigidez. A partir do método do decremento, encontra-se a frequência natural do corpo através da relação com a massa, conforme é mostrado na Eq. (20).

$$k = m\omega_n^2 \quad (20)$$

Com os valores da frequência natural encontrados por esse método, utiliza-se a Eq. (20) para encontrar os valores de constante de rigidez das molas para massa 2 e massa 1, sendo respectivamente, 458,57 N/m e 539,20 N/m.

Para realizar a simulação das respostas do sistema, utilizamos o software Matlab. Seguindo o método aplicado para a realização do decremento logarítmico, as simulações foram feitas transformando o sistema em um sistema com 1 gdl, onde as matrizes  $A$  e  $B$  da formulação em espaço de estados são representadas da seguinte forma.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\left(\frac{k}{m}\right) & -\left(\frac{c}{m}\right) \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

Os valores de massa, rigidez e amortecimento foram substituídos nas matrizes  $A$  e  $B$ , conforme a Tabela 4. Analisando os parâmetros do sistema, foi utilizado uma balança para determinar o peso de cada massa do sistema (gramas), obtendo de maneira aproximada um valor de 396,29 g para massa 1, carro azul, e 337,10 g para massa 2, carro verde.

**Tabela 4.** Valores dos parâmetros de massa, rigidez e amortecimento da bancada.

Coefficientes de amortecimento	Coefficientes de rigidez	Massas
$c_1 = 1,58 \text{ Ns/m}$	$k_1 = 539,20 \text{ N/m}$	$m_1 = 396,29 \text{ g}$
$c_2 = 1,39 \text{ Ns/m}$	$k_2 = 458,57 \text{ N/m}$	$m_2 = 337,10 \text{ g}$

Fonte: Elaborado pelo próprio autor (2023).

Com isso, foi possível discretizar as matrizes  $A$  e  $B$  e assim calcular as respostas do sistema através da formulação discreta das equações de estado, conforme as Eqs. (12) e (13). Como o sistema não possui excitação externa, o vetor de entrada  $u$  é nulo. Deste modo, a resposta foi calculada a partir das condições iniciais, mais especificamente, as condições de deslocamento. Para a simulação, foi dada uma condição de deslocamento para as massas de 30 mm.

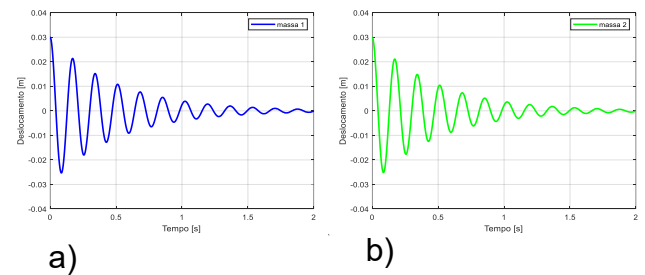
Como visto na Eq. (11), a saída depende das matrizes  $C$  e  $D$ . Dois casos foram calculados: (i) quando a saída remete diretamente a um dos estados do vetor de estados, os deslocamentos das massas, por exemplo, e (ii) quando a saída não remete diretamente um estado, nesse caso, a aceleração das massas.

No primeiro caso, a matriz  $C$  terá valores unitários apenas nas posições referentes a posição do estado no vetor. E, conseqüentemente, a matriz  $D$  é nula.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

As respostas do sistema podem ser visualizadas na Figura 6. Nela observamos o comportamento do deslocamento das massas em função do tempo. Pela aplicação da condição de deslocamento inicial de (0,03m), as duas se deslocam de forma oscilatória, e diminuem a amplitude do sinal com o passar do tempo.



**Figura 6.** Resposta simulada do deslocamento da a) massa 1 e da b) massa 2.

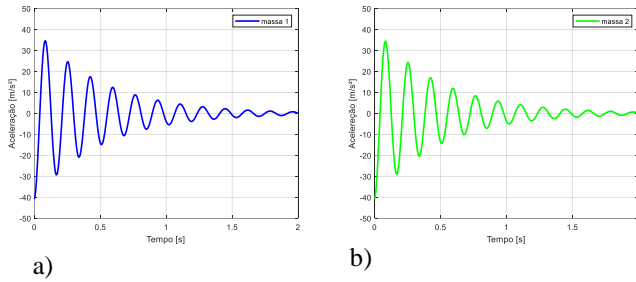
Fonte: Elaborado pelo próprio autor (2023).

No segundo caso, a matriz  $C$  e a matriz  $D$  foram manipuladas, utilizando as equações do movimento, para a saída do sistema ser as próprias acelerações das massas – já que o sistema real possui dois sensores de aceleração. Nesse caso, as matrizes  $C$  e  $D$  são dadas por:

$$C = \begin{bmatrix} -\left(\frac{k}{m}\right) & -\left(\frac{c}{m}\right) \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$D = \left[ \frac{1}{m} \right] \quad (26)$$

Após as alterações, a Figura 7 representa de forma simulada o gráfico da aceleração em função do tempo. Pode-se visualizar o mesmo comportamento vibratório subamortecimento da resposta do deslocamento, mas com valores diferentes, próprios da aceleração.

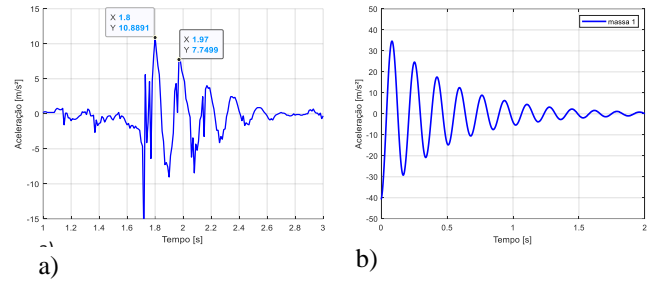


**Figura 7.** Resposta simulada da aceleração da a) massa 1 e da b) massa 2.

**Fonte:** Elaborado pelo próprio autor (2023).

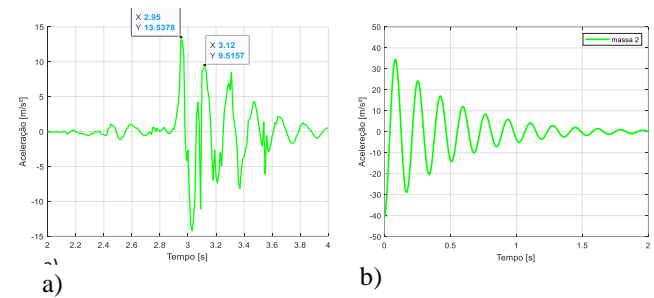
Realizado uma comparação entre as respostas experimentais e simuladas do sistema, sendo as Figuras 8a e 9a as respostas experimentais e as Figuras 8b e 9b as simuladas, é possível se observar uma semelhança no comportamento ondulatorio, e uma certa similaridade dos sinais no decorrer do tempo. Isso ocorre embora as respostas experimentais apresentem os já esperados ruídos no sinal em comparação a resposta simulada. Para o desempenho do filtro, foram feitas tentativas de valores nos parâmetros  $Q$  e  $R$  utilizando 0,1 e 1,2 respectivamente para obter os melhores resultados.

Também se percebe comparando as figuras, uma certa disparidade das grandezas das respostas. A resposta simulada apresenta valores maiores nos picos das oscilações. Isso ocorre devido a possíveis variâncias e instabilidades na leitura, já que as respostas experimentais estão passíveis de interferências ruidosas, pois a leitura do sinal não ocorre em um cenário ideal.



**Figura 8.** Respostas de aceleração do sistema para massa 1 (a) experimental e (b) simulado.

**Fonte:** Elaborado pelo próprio autor (2023).



**Figura 9.** Respostas de aceleração do sistema para massa 2 (a) experimental e (b) simulado.

**Fonte:** Elaborado pelo próprio autor (2023).

## Considerações Finais

Este trabalho apresentou a modelagem matemática e a construção da bancada de um sistema massa-mola composto com dois graus de liberdade. Realizou a caracterização dos parâmetros rigidez de amortecimento e constante de mola por meio de experimentos, que foram possíveis devido o sensoriamento obtido da ligação do acelerômetro com a programação contida no Arduino. Deste modo transmitiu os dados ao computador sendo assim possível visualizar gráficos do sistema para que com essas respostas se implementar a base teórica que gera a definição dos parâmetros, possibilitando os implementar na modelagem matemática e gerar simulações do sistema. Sendo de suma importância para possíveis implementações de programações ou métodos.

Além de demonstrar por meio da simulação feita seguindo a modelagem matemática a representação do sinal do deslocamento possuindo apenas as respostas da aceleração gerada pelo Arduino. Desta forma para obter tais resultados tanto o aluno quanto o orientador adquiriram e aperfeiçoaram seus conhecimentos realizando essas metodologias que são

poucas usadas dentro da didática em sala de aula, expandindo as pesquisas científicas no IFMS.

### Agradecimentos

Agradecemos ao incentivo financeiro do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e do Instituto Federal de Mato Grosso do Sul (IFMS) através do Edital 030/2021-Propi/IFMS. Também, ao IFMaker Três Lagoas por disponibilizar a infraestrutura, equipamentos e insumos necessários para realização desse projeto.

### Referências

BÜHLER, A. J. et al. **Comparação entre simulação e sistema real de vibração com dois graus de liberdade**. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 41, n. 4, 2019.

RAO, S. **Vibrações Mecânicas**. 4. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2008.

OGATA, K. **Engenharia de Controle Moderno**, 5. ed., São Paulo – SP: Ed. Pearson, 2010.

RIBEIRO, D. A. et al. **Análise de amortecimento em decremento logarítmico com acelerômetro de vibração**. Research, Society and Development, v. 10, n. 11, p. e235101119438-e235101119438, 2021.

COSSOLINO, L. C.; PEREIRA, A. H. A. Amortecimento: classificação e métodos de determinação. **ATCP Engenharia Física**, 2010. Disponível em: <<https://sonelastic.com/images/ITC04-ATCP.pdf>> Acesso em: 7 mar 2023.

SILVA, P. H. O. **Protótipo para monitoramento da dinâmica de vagões ferroviários**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica). Universidade de São João Del-Rei, São João Del-Rei, 2019.

STANZANI, D. C. S; BERGAMASCHINE, Giovanni C. Comparação experimental de obtenção da frequência natural de um sistema dissipativo. **Anais do Congresso de Engenharia da Universidade Federal de São João del-Rei**, 2018. Disponível em: <<https://proceedings.science/coen-2018/trabalhos/comparacao-experimental-da-obtencao-da-frequencia-natural-de-um-sistema-dissipat?lang=pt-br>> Acesso em: 10 mar 2023.

## CONSTRUCTION AND CHARACTERIZATION OF A BENCH WITH A MASS-SPRING SYSTEM

**Abstract:** *This work presents the construction and characterization of a bench with a spring mass system, with the objective of contextualizing in a didactic way the study of a mass-spring-damper system, in which its vibrations and its characteristics will be studied and analyzed. Thus, the steps of mathematical modeling, equation of the movement of the mass-spring system were performed, and the formulation in space of states in continuous and discrete time. Then, the construction of the bench for analysis of the system, and after that the characterization of the parameters necessary to perform the simulations was made. Finally, comparing the simulated results obtained with the experimental results.*

**Keywords:** *Mass-spring system, Mathematical modeling, Logarithmic decrement, 3D printing, Arduino.*